

Teorie k početní části

Matematika 2, 2024/25
výťah teorie ze cvičení

Parciální derivace (10 bodů)

Tabulka s derivacemi od Kuncové.

Návod

- určit a nakreslit $D(f)$, jaká je jeho hranice?
 - K nakreslení se může hodit: napsat si $D(f)$ jako konečné sjednocení/průnik množin tvaru $[y < g(x)]$, resp. $[y > g(x)]$, neb tyto množiny jsou vlastně plocha pod/nad grafem funkce g
- určit, zda je funkce definovaná po větvích - v tom případě si nakreslím množiny, na kterých má různé předpisy
- zjistím, zda a kde je funkce spojitá (potřeba např. k Větě 44 - ZS)
- ve vnitřních získaných množin vypočítám parciální derivace
- pokud je funkce na hranicích množin definována, spočtu zde derivace zvlášť - z definice/dle Věty 44 - ZS.
 - Aby parciální derivace dávala smysl, musí být funkce definována na úsečce procházející daným bodem v příhodném směru (např., pokud funkce není těsně nad bodem x definována, nemá smysl tam počítat derivaci podle y .)
- Tečná rovina: pokud jsou par. derivace spojitě, je definována.
 - Dosadím do předpisu $T(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a)(x_i - a_i)$. Pokud chci graf T popsat rovnicí, tak v předpisu pro T místo $T(x)$ napíši x_{n+1} .

Definice (Parciální derivace). Nechť f je funkce n proměnných, $i \in \{1, \dots, n\}$, $a \in \mathbb{R}^n$. Pak číslo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}\end{aligned}$$

nazýváme **parciální derivací (prvního řádu) funkce f** podle j -té proměnné v bodě a (pokud limita existuje).

Aritmetika derivací: $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

Derivace složené funkce: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Věta 44 - ZS (Výpočet jednostranné derivace). Nechť reálná funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Levá strana analogicky.

Věta 21 (záměnnost parciálních derivací). Necht' $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a funkce f má na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$ obě parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, a tyto funkce jsou v bodě a spojité. Pak platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Definice (Tečná nadrovina). Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $a \in G$, $f \in \mathbb{C}^1(G)$. Pak graf funkce

$$T(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a) \cdot (x_i - a_i)$$

je **tečná nadrovina** fe grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$.

Definice. Uvažme funkci $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Pak za **vrstevnici funkce** f považujeme množinu $[f = c]$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Implicitně zadaná funkce (10 bodů)

Návod

- anulujeme rovnici a nenulovou stranu označíme jako F
- spočteme parciální derivace F
- ověříme předpoklady věty 22, resp. věty 23
- dle věty 22, resp. 23, spočteme φ' , resp. φ', ψ' pomocí násl.
 - pomocí řetízkového pravidla
 - metodou: zderivuji rovnost $F(x, \varphi(x)) = 0$ podle příslušné proměnné, vyjádřím φ'
- dosadíme spočtené do tečné nadroviny z definice

Věta 20 (derivace složené funkce). Necht' $r, s \in \mathbb{N}$ a necht' $G \subset \mathbb{R}^s$, $H \subset \mathbb{R}^r$ jsou otevřené množiny. Necht' $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in C^1(G)$, $f \in C^1(H)$ a bod $[\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)] \in H$ pro každé $x \in G$. Potom složená funkce $F: G \rightarrow \mathbb{R}$ daná předpisem

$$F(x) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x)), x \in G,$$

je třídy C^1 na G . Necht' $a \in G$ a $b = [\varphi_1(a), \dots, \varphi_r(a)]$. Pak pro $j \in \{1, \dots, s\}$ platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial y_i}(b) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a).$$

Věta 21 (záměnnost parciálních derivací). Necht' $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a funkce f má na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$ obě parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, a tyto funkce jsou v bodě a spojité. Pak platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Věta 22 (o implicitní funkci). Mějme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a bod $[x_0, y_0] \in G$. Uvažujme funkci $F: G \rightarrow \mathbb{R}$ splňující:

- (i) $F \in C^1(G)$,
- (ii) $F(x_0, y_0) = 0$,
- (iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existuje U okolí bodu x_0 (v $\mathbb{R}^n$) a okolí V bodu y_0 (v $\mathbb{R}$) taková, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ splňující $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y jako $\varphi(x)$, pak takto vzniklá funkce $\varphi \in C^1(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} \text{ pro } x \in U, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Poznámka. Vždy platí, že $\varphi(x_0) = y_0$ a $F(x, \varphi(x)) = 0$ na jistém okolí bodu x_0 .

Poznámka (Prohození souřadnic). Chceme-li ukázat, že zadaná rovnost určuje implicitně zadanou funkci jiných proměnných, než obvykle, stačí v postupu prohodit souřadnice. Vizte příklad níže.

Příklad. Ukažte, že rovnice $x^2 + y^2 = 1$ určuje na okolí bodu $[1, 0]$ implicitně zadanou funkci φ proměnné y . (nikoli proměnné x).

Postup bude stejný, akorát tam, v postupu prohodíme výskyty F'_x, F'_y - tj. při ověřování (iii) ve větě 22 budeme zjišťovat, zda $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$ atd.

Vzorec pro druhou derivaci, odvozený na cviku:

$$\begin{aligned} \text{Máme } \varphi'(x) &= -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))}. \\ \varphi'' &= -\frac{(F''_{x,x} + F''_{x,y} \cdot \varphi') \cdot F'_y - F'_x \cdot (F''_{y,x} + F''_{y,y} \cdot \varphi')}{(F'_y)^2}, \end{aligned}$$

kde F a její derivace vyhodnocujeme v bodě $(x, \varphi(x))$ a φ a její derivace vyhodnocujeme v bodě x .

Může se hodit:

Věta (Vztah znaménka derivace a monotonie funkce). Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nede degenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\text{Int } J$) má derivaci.

- (i) Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \text{Int } J$, pak f je rostoucí na J .
- (ii) Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \text{Int } J$, pak f je klesající na J .
- (iii) Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \text{Int } J$, pak f je neklesající na J .
- (iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \text{Int } J$, pak f je nerostoucí na J .

Věta (druhá derivace a konvexita). Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*, a < b$ a f má na intervalu (a, b) vlastní druhou derivaci.

- (i) Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b) .
- (ii) Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b) .
- (iii) Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b) .
- (iv) Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konkávní na (a, b) .

Věta 23 (o dvou implicitních funkcích). Mějme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$ a bod $[x_0, y_0] \in G$. Uvažujme dvě funkce $F_1, F_2 : G \rightarrow \mathbb{R}$ splňující pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$:

(a) $F_1, F_2 \in C^k(G)$,

(b) $F_1(x_0, y_0) = 0, F_2(x_0, y_0) = 0$ a

(c) $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}(x_0, y_0) = \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x_0, y_0) - \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(x_0, y_0) \neq 0.$

Potom existuje U okolí bodu x_0 (v $\mathbb{R}^n$) a okolí V bodu y_0 (v $\mathbb{R}^2$) taková, že pro každé $x \in U$ existuje jediné $y \in V$ splňující $F_1(x, y) = 0 = F_2(x, y)$. Můžeme tedy reprezentovat $[y_1, y_2] = [\varphi(x), \psi(x)]$ pro nějaké funkce $\varphi, \psi \in C^k(U)$.

Poznámka. Obvykle dostaneme soustavu rovnic o proměnných x, y, u, v . Pak bod x_0 ve větě výše je z našeho zadání $[x_0, y_0]$ a bod y_0 je z našeho zadání bod $[u_0, v_0]$. Vždy platí $\varphi(x_0, y_0) = u_0, \psi(x_0, y_0) = v_0$ a $F_1(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = 0$ na jistém okolí $[x_0, y_0]$.

Vzorce pro derivace

$$\begin{aligned} \psi'_x &= \frac{(F_2)'_x (F_1)'_u - (F_1)'_x (F_2)'_u}{(F_1)'_v (F_2)'_u - (F_2)'_v (F_1)'_u}, \varphi'_x = \frac{-(F_1)'_v \psi'_x - (F_1)'_x}{(F_1)'_u} \\ \psi'_y &= \frac{(F_2)'_y (F_1)'_u - (F_1)'_y (F_2)'_u}{(F_1)'_v (F_2)'_u - (F_2)'_v (F_1)'_u}, \varphi'_y = \frac{-(F_1)'_v \psi'_y - (F_1)'_y}{(F_1)'_u} \end{aligned}$$

Derivace za pomoci matic:

(φ'_x, ψ'_x) je řešením soustavy dané maticí

$$\begin{pmatrix} (F_1)'_u & (F_1)'_v & -(F_1)'_x \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & -(F_2)'_x \end{pmatrix}$$

a (φ'_y, ψ'_y) je řešením soustavy dané maticí

$$\begin{pmatrix} (F_1)'_u & (F_1)'_v & -(F_1)'_y \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & -(F_2)'_y \end{pmatrix}.$$

Matice výše (bez pravé strany) je přesně matice, jejíž determinant ověřujeme ve Větě 23.

Definice (Tečná nadrovina). Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $a \in G, f \in \mathbb{C}^1(G)$. Pak graf funkce

$$T(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a) \cdot (x_i - a_i)$$

je **tečná nadrovina** ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$.

Extrémy funkce více proměnných (15 bodů)

Množiny v $\mathbb{R}^n$

Značení. Namísto $x \in \mathbb{R}^n : V(x)$, kde $V(x)$ je nějaká vlastnost pro bod $x \in \mathbb{R}^n$, budeme psát $[V(x)]$.

Definice. Buď $M \subset \mathbb{R}^n$.

Bod $x \in \mathbb{R}^n$ je

- **vnitřní bod** množiny M , pokud $\exists r > 0 : B(x, r) \subset M$
- **hraniční bod** množiny M , pokud $\forall r > 0 : B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$.

Dále

- $\text{Int } M = [x \text{ je vnitřní bod mn. } M]$ je **vnitřek množiny** M ,
- $H(M) = [x \text{ je hraniční bod mn. } M]$ je **hranice množiny** M .

Uzávěr množiny M je množina $M \cup H(M)$, značíme ji $\overline{M}$.

Množina M je **otevřená** (v $\mathbb{R}^n$), jestliže je každý její bod zároveň vnitřním bodem.

Množina M je **uzavřená** (v $\mathbb{R}^n$), jestliže $H(M) \subset M$ (respektive, pokud $\overline{M} = M$).

Věta 4. $M \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená $\iff \mathbb{R}^n \setminus M$ uzavřená $\iff$ pro každou posl. $x_n \in M, n \in \mathbb{N}$, konvergující k $x \in \mathbb{R}^n$ platí, že $x \in M$.

Věta 2, 5 (vlastnosti otevřených a uzavřených množin). V $\mathbb{R}^n$ platí:

- $\emptyset, \mathbb{R}^n$, libovolné sjednocení otevřených, konečný průnik otevřených jsou **otevřené** množiny
- $\emptyset, \mathbb{R}^n$, libovolný průnik uzavřených, konečné sjednocení uzavřených jsou **uzavřené** množiny

Věta 11. Nechť f je spojitá funkce na $\mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom platí:

- množiny $[f > c], [f < c]$ jsou otevřené,
- množiny $[f \leq c], [f \geq c], [f = c]$ jsou uzavřené.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je **omezená**, pokud existuje $r > 0$ t.ž. $M \subset B(0, r)$.

Věta 12 (Charakterizace kompaktních množin). Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.

Extrémy

Návod

- vyšetřím kompaktnost M - Věta 14
- vyšetřím f na $\text{Int } M$ - Věta 16
- vyšetřím f na $H(M)$
 - multiplikátory - Věty 24, 25 (pozor je potřeba, aby G otevřená $\implies$ řešíme na $\text{Int } G$ a případně vyšetříme zvlášť f na $H(G)$)
 - bod $H(M)$ lze vyjádřit jako bod závislý na méně proměnných (parametrizace) $\implies$ dosadím jej do f a zkoumám dál

- porovnám hodnoty ve všech bodech podezřelých z extrémů a vyberu největší a nejmenší.
 - M komp. $\implies$ jde o maxima a minima
 - M omezená, ale ne komp. $\implies$ zkoumám na $\overline{M}$ a pokud extrémy vyjdou v bodech, které nejsou v M , tak jde pouze o infima/suprema
 - M neomezená $\implies$ je třeba nějakým trikem ukázat, že jde skutečně o maximum/minimum (odhady, pomocí derivací apod.).

Věta 14 (o nabývání extrémů). Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná kompaktní množina a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá, pak f na M nabývá svého maxima i minima.

Věta 16 (nutná podmínka lokálního extrému). Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je ot. mn., $a \in G$ a funkce $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ má v a lokální extrém. Pak pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ platí, že $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ buď neexistuje, nebo je rovna nule.

Věta 24 (Lagrangeova věta o multiplikátoru). Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f, g \in C^1(G)$. Označme $M = \{x \in G: g(x) = 0\}$ a nechť $\tilde{x} \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M . Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I) $\nabla g(\tilde{x}) = \mathbf{0}$,

(II) existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující $\nabla f(\tilde{x}) + \lambda \nabla g(\tilde{x}) = \mathbf{0}$.

Věta 25 (Lagrangeova věta o dvou multiplikátorech). Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina, $f, g_1, g_2 \in C^1(G)$. Označme $M = \{x \in G: g_1(x) = g_2(x) = 0\}$ a nechť bod $\tilde{x} \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M . Potom je splněna alespoň jedna z podmínek:

(I) $\nabla g_1(\tilde{x}), \nabla g_2(\tilde{x})$ jsou lineárně závislé - tj. $\nabla g_2(\tilde{x}) = 0$ nebo existuje $k \in \mathbb{R}$ t.ž. $\nabla g_1(\tilde{x}) = k \cdot \nabla g_2(\tilde{x})$

(II) existují $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ splňující $\nabla f(\tilde{x}) + \alpha \nabla g_1(\tilde{x}) + \beta \nabla g_2(\tilde{x}) = \mathbf{0}$.

Primitivní funkce, určitý integrál (15 bodů)

Definice. Funkce F je **primitivní funkce** na otevřeném neprázdňém intervalu I k funkci f , pokud $F' = f$ na celém I . Značíme $\int f \stackrel{c}{=} F$, respektive $\int f(x) dx \stackrel{c}{=} F(x)$.

Věta (linearita integrálu). Nechť f, g jsou spojitě funkce a $a, b \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\int a f(x) + b g(x) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx.$$

Věta (per partes). Nechť u, v jsou spojitě funkce na I . Pak platí

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v.$$

Věta (o substituci). Buď F primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b) a φ diferencovatelná funkce na (α, β) . Je-li $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$, pak platí

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) \text{ pro } x \in (\alpha, \beta).$$

Parciální zlomky

Rozklad na parciální zlomky - postup

- funguje v případě, že číselník je nižšího řádu, než jmenovatel - pokud tomu tak není, tak nejdříve provedeme dělení polynomu polynomem
- jmenovatele rozložíme na součin - co nejvíce to jde, dostaneme nejvýše kvadratické činitele (mohou se hodit reciproké rovnice - viz níže)
- napíšu *zadaný zlomek* = součet zlomků takto:
 - ve jmenovateli je $(ax + b)^n \implies$ napravo napíšu $\frac{A_1}{ax+b} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$
 - ve jmenovateli je $(ax^2 + bx + c)^n \implies$ napravo napíšu $\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$
- získanou rovnici přenásobím jmenovatelem
- dosadím nulové body $\rightarrow$ určím tak pár koeficientů
- upravím do tvaru $\dots = (\dots)x^n + (\dots)x^{n-1} + \dots + (\dots)x + (\dots)$
- porovnám koeficienty u stejných mocnin $x \rightarrow$ soustava
- vyřeším soustavu $\rightarrow$ dostanu hodnoty A_i, B_i

Poznámka. Při rozkladu jmenovatele: pokud kvadratický trojčlen lze rozložit na součin, tak jej rozložíme (jinak by mohl vyjít zlomek, který nelze zintegrovat).

Fakt. Každý polynom lze rozložit na součin polynomů druhého a prvního stupně.

Nápověda

- číselník alespoň stejného stupně, než jmenovatel $\rightarrow$ dělení mnohočlenu mnohočlenem
- rozklad na parciální zlomky
- $\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx \rightarrow$ substituce
- $\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} dx \rightarrow$ substituce
- $\int \frac{1}{ax^2+b} dx \rightarrow$ substitucí převedeme na $\int \frac{1}{y^2+1} dy$
- $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx \rightarrow$ doplněním na čtverec, převedeme na předchozí případ
- $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} dx \rightarrow \int \frac{1}{(u^2+1)^n} du \rightarrow$ substituce $u = \tan t$

Reciproké rovnice

Definice. Uvažme rovnici $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, kde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$.

Pokud $a_k = a_{n-k}$ pro $k = 0, \dots, n$, pak je rovnice **reciproká rovnice 1. druhu**.

Pokud $a_k = -a_{n-k}$ pro $k = 0, \dots, n$, pak je rovnice **reciproká rovnice 2. druhu**.

Poznámka. 1. druh: první a poslední koeficient se rovnají, druhý a předposlední se rovnají, atd. ...

2. druh: první a poslední koeficient se ve znaménku, druhý a předposlední se liší ve znaménku, atd. ...

Příklad.

1. druh: $2x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 2 = 0$
2. druh: $3x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 2x - 3 = 0$

Pokud by v poslední rovnici místo 0 bylo jiné číslo, tak by nešlo o reciprokou rovnici - 1. druhu být nemůže, neboť $a_4 \neq a_0$, a 2. druhu být nemůže, neb $a_2 \neq -a_2$ ($n = 4, k = 2$).

Platí následující:

- Je-li x kořenem reciproké rovnice, pak i $\frac{1}{x}$ je kořenem reciproké rovnice
- 1. druh lichý stupeň $\implies -1$ je kořen
- 1. druh sudý stupeň $\implies$ vytkneme $x^{\frac{n}{2}}$ a užijeme substituci $y = x + \frac{1}{x}$
- 2. druh $\implies 1$ je kořen

Postup: Rovnici vydělíme $(x - \text{kořen})$ nebo $x^{\frac{n}{2}}$ - podle toho o jaký typ rovnice jde (viz výše). Dostaneme reciprokou rovnici nebo rovnici, kterou již umíme vyřešit a postupujeme dál.

Příklad. Vyřešte rovnici $3x^5 + 16x^4 + 29x^3 + 29x^2 + 16x + 3 = 0$ nad $\mathbb{R}$.

Řešení. Zřejmě jde o rovnici 1. druhu lichého stupně. Rovnice by tedy, dle výše uvedeného, kořen -1 (lze ověřit dosazením).

$$\begin{aligned} 3x^5 + 16x^4 + 29x^3 + 29x^2 + 16x + 3 &= 0 \quad / : (x + 1) \rightarrow \text{kořen } -1 \\ 3x^4 + 13x^3 + 16x^2 + 13x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Dostali jsme rovnici 1. druhu sudého stupně. Proto rovnici vytkneme x^2 a provedeme substituci $y = x + \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} 3x^4 + 13x^3 + 16x^2 + 13x + 3 &= x^2 \left(3x^2 + 13x + 16 + \frac{13}{x} + \frac{3}{x^2} \right) \\ y = x + \frac{1}{x}, \quad y^2 &= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \\ \text{pak } 3x^2 + 13x + 16 + \frac{13}{x} + \frac{3}{x^2} &= 13 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 3 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 16 = 13y + 3(y^2 - 2) + 16 = \\ &= 3y^2 + 13y + 16 - 6 = 3y^2 + 13y + 10 = (y + 1)(3y + 10) = \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) \left(3x + \frac{3}{x} + 10 \right) \\ \implies 3x^4 + 13x^3 + 16x^2 + 13x + 3 &= x \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) x \left(3x + \frac{3}{x} + 10 \right) = (x^2 + x + 1)(3x^2 + 10x + 3) = \\ &= (x^2 + x + 1)(3x + 1)(x + 3) \end{aligned}$$

Z rozkladu je vidno, že rovnice $3x^4 + 13x^3 + 16x^2 + 13x + 3 = 0$ má kořeny $-\frac{1}{3}, -3$.

Celkově má zadaná rovnice kořeny: $-3, -1, -\frac{1}{3}$.

△

Goniometrické substituce, odmocniny

!!! Vždy je třeba si hlídat definiční obory !!!

Goniometrické substituce

Nechť $R(\cdot, \cdot)$ je racionální funkce dvou proměnných (jde o podíl dvou polynomů dvou proměnných).

- $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \cos x, dt = -\sin x dx$
- $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \sin x, dt = \cos x dx$
- $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \implies t = \tan x$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Pak

$$dx = \frac{1}{t^2 + 1} dt, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + t^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1 + t^2}$$

- Vždy: $t = \tan \frac{x}{2}$ pro $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Pak

$$dx = \frac{2}{1 + t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Odmocniny

Nechť $R(\cdot, \cdot)$ je racionální funkce dvou proměnných (jde o podíl dvou polynomů dvou proměnných).

U níže uvedených substitucí: k dopočtu dt nejdříve vyjádříme x v závislosti na t a pak teprve derivujeme (vizte příklad níže)

- $R(x, \sqrt[m]{x+a}), m \in \mathbb{N}, m > 1, \implies t = \sqrt[m]{x+a}$
- $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), m \in \mathbb{N}, m > 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad \neq bc \implies t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
- $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$
 - $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 \implies \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}|x - x_1|$
 - $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \implies t = \sqrt{a \frac{x - x_1}{x - x_2}}$
 - $ax^2 + bx + c$ nemá kořen $\implies t = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm x\sqrt{a}$

Poznámka. Vyskytuje-li se v integrálu více odmocnin, převedeme je na mocniny téže odmocniny (např. $\sqrt{x}$ a $\sqrt[3]{x}$ převedeme na $(\sqrt[6]{x})^3$ a $(\sqrt[6]{x})^2$).

Příklad. $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

$$t^2 = \frac{x+1}{x-2} \implies t^2(x-2) = x+1 \implies x(t^2-1) = 1+2t^2 \implies x = \frac{2t^2+1}{t^2-1}$$

$$x = \frac{2t^2+1}{t^2-1} \implies dx = \frac{4t(t^2-1) - (2t^2-1)2t}{(t^2-1)^2} dt = \frac{4t^3 - 4t - 4t^3 - 2t}{(t^2-1)^2} dt = \frac{-6t}{(t^2-1)^2} dt$$

Určitý integrál

Definice (Určitý integrál). Necht' $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^*$ a F ke primitivní funkce k f na (a, b) . Pak

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b-) - F(a+),$$

kde

$$F(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x), \quad F(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} F(x),$$

pokud limity i jejich rozdíl existují jako prvky $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Značení. $[F(x)]_a^b = F(b-) - F(a+)$, navíc pro $a < b$ definujeme $[F(x)]_b^a$ jako $-[F(x)]_a^b$.

Poznámka. Některé integrály na nekonečných intervalech vychází konečně, jiné nekonečně. Např. lze ukázat: $\int_1^\infty \frac{1}{x} \, dx = \infty$ a $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx = 1 < \infty$.

Věta (Aditivita integrálu). Necht' $a, b, c \in \mathbb{R}^*, a < c < b$.

(i) Pokud existuje $\int_a^b f(x) \, dx$, pak existují i $\int_a^c f(x) \, dx$ a $\int_c^b f(x) \, dx$ a platí

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

(ii) Pokud existují $\int_a^c f(x) \, dx, \int_c^b f(x) \, dx$ a f je v c spojitá, pak existuje i $\int_a^b f(x) \, dx$ a je roven

$$\int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Věta (Substituce pro určitý integrál). Necht' $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ φ je diferencovatelná na intervalu (α, β) a **ryze monotónní** a F je primitivní funkce k funkci f na intervalu $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$. Pak

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x) \, dx = [F(y)]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}.$$

Je potřeba si hlídat, aby φ byla ryze monotónní. Proto např. u substituce $t = \tan x$ je někdy nutné nejdříve použít aditivitu integrálu a roztrhnout interval, na kterém integrujeme, na takové intervaly, kde je $\tan x$ ryze rostoucí apod.

Může se hodit

Limita složené funkce: Bud' $c, D, A \in \mathbb{R}^*$, a jsou f a g funkce. Necht' platí, že $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = D$ a $\lim_{x \rightarrow D} f(x) = A$. Necht' platí alespoň jedna z podmínek:

(P) $\exists \eta > 0 \, \forall x \in P(c, \eta) : g(x) \neq D$,

(S) f je spojitá v D .

Pak platí $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = A$.

$$\bullet (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\bullet \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\bullet \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$\bullet \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Známé limity

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Odmocniny vícero typů lze převést na odmocniny jednoho typu - např. $\sqrt[5]{x} + \sqrt{x} = (\sqrt[10]{x})^2 + (\sqrt[10]{x})^5$.

Fakt. Každý polynom lze rozložit na součin polynomů druhého a prvního stupně.